TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

ThS Phạm Thị Hải Châu

GIÁO TRÌNH

TOÁN CƠ SỞ

(Dùng cho hệ đào tạo từ xa – ngành GD Mầm non)

Vinh 2011

LỜI NÓI ĐẦU

Cuốn giáo trình này được biên soạn theo chương trình đào tạo giáo viên mầm non có trình độ đại học (hệ đào tạo từ xa) của khoa Giáo dục, trường Đại học Vinh. Giáo trình cung cấp một số kiến thức cơ bản của toán học, được dùng như một tài liệu tham khảo cho người dạy và người học.

Nội dung giáo trình gồm có ba chương.

Chương I: ***Tập hợp - Quan hệ - Ánh xạ***.

Chương này giới thiệu các khái niệm cơ bản về tập hợp và các phép toán trên tập hợp, các quan hệ cơ bản trên tập hợp, các khái niệm liên quan đến ánh xạ. Bên cạnh đó, chương này còn đưa ra một số tính chất quan trọng của các khái niệm trên.

Chương II: ***Số tự nhiên***.

Chương này đưa ra các khái niệm và các tính chất liên quan đến số tự nhiên như: bản số, tập hữu hạn, tập vô hạn, tập hợp số tự nhiên, ... Sau khi đưa ra các khái niệm đó, chương này còn giới thiệu về quan hệ thứ tự và các phép toán trên tập hợp số tự nhiên.

Chương III: ***Các hình hình học***.

Chương này giới thiệu các khái niệm cơ bản về hình hình học, các hình hình học trong mặt phẳng và trong không gian cùng một số tính chất cơ bản của chúng.

Bên cạnh việc trình bày lý thuyết, giáo trình có đưa ra các ví dụ minh họa và bài tập nhằm củng cố và khắc sâu nội dung lý thuyết.

Tác giả xin chân thành cảm ơn các đồng nghiệp đã giúp đỡ và góp ý để tác giả hoàn thành cuốn giáo trình này.

Giáo trình có thể còn có những thiếu sót. Tác giả rất mong nhận được sự chỉ dẫn và góp ý của bạn đọc.

Tác giả

Chương I : TẬP HỢP - QUAN HỆ - ÁNH XẠ

A. NỘI DUNG BÀI GIẢNG

§1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ TẬP HỢP

1.1. Khái niệm tập hợp.

"Tập hợp" là một thuật ngữ được dùng rộng rãi trong toán học. Chúng ta thường nói về tập hợp số tự nhiên, tập hợp điểm trên một mặt phẳng, tập hợp nghiệm của một phương trình, tập hợp các học sinh trong một lớp, tập hợp các đồ chơi trong một lớp mẫu giáo, ...

Tập hợp (thường nói gọn là tập) là một khái niệm cơ bản của toán học, nó được dùng làm cơ sở để định nghĩa nhiều khái niệm khác nhưng bản thân nó không được định nghĩa qua những khái niệm đơn giản hơn.

Ta hiểu *tập hợp được tạo thành bởi các cá thể (các đối tượng), các cá thể tạo thành tập hợp gọi là các phần tử của tập hợp*.

Ví dụ: Tập hợp nghiệm của phương trình (x-1) (x-4) = 0 là tập hợp tạo thành bởi hai phần tử 1 và 4; tập hợp các số tự nhiên có một chữ số là tập hợp tạo thành bởi mười phần tử 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Một tập hợp thường được ký hiệu bởi chữ cái in hoa : A, B, C, X, Y, ...; mỗi phần tử của một tập hợp thường được ký hiệu bởi chữ cái thường: a, b, c, x, y, ...

Để chỉ a là một phần tử của tập A ta viết $a \in A$ (đọc "a thuộc A"), nếu a không là phần tử của tập A ta viết $a \notin A$ (đọc"a không thuộc A").

Ví dụ:

1) Ở chương trình toán phổ thông ta đã biết:

N là tập hợp các số tự nhiên,

Z là tập hợp các số nguyên,

Q là tập hợp các số hữu tỉ,

R là tập hợp các số thực.

Thế thì:

$5 \in \mathbf{N}$; $5 \in \mathbf{Z}$; $5 \in \mathbf{Q}$; $5 \in \mathbf{R}$;

$-3 \notin \mathbf{N}$; $-3 \in \mathbf{Z}$; $-3 \in \mathbf{Q}$; $-3 \in \mathbf{R}$;

$2{,}5 \notin \mathbf{N}$; $2{,}5 \notin \mathbf{Z}$; $2{,}5 \in \mathbf{Q}$; $2{,}5 \in \mathbf{R}$;

$\sqrt{2} \notin \mathbf{N}$; $\sqrt{2} \notin \mathbf{Z}$; $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$; $\sqrt{2} \in \mathbf{R}$.

2) Nếu A là tập hợp tất cả các số tự nhiên lẻ thì $3 \in A$, $4 \notin A$.

1.2. Sự xác định một tập hợp.

Một tập hợp được coi là đã xác định nếu ta biết được một phần tử nào đó có thuộc tập hợp đó hay không. Để xác định một tập hợp ta thường dùng hai phương pháp sau:

a) *Phương pháp liệt kê các phần tử của tập hợp*.

Ta liệt kê đầy đủ tất cả các phần tử của tập hợp, những tập hợp này thường có "không nhiều" phần tử. Khi đó các phần tử được viết trong {}, phần tử này cách phần tử kia bởi dấu phẩy.

Ví dụ: Nếu A là tập hợp các ước số dương của 4 thì ta viết

$$A = \{1, 2, 4\}.$$

Tuy nhiên, có những tập hợp có vô số phần tử và ta chỉ liệt kê một số phần tử đại diện đủ để nhận biết được một phần tử nào đó có thuộc tập hợp hay không.

Ví dụ: Nếu B là tập hợp các số tự nhiên chia hết cho 3 thì

$$B = \{0, 3, 6, 9, ...\}.$$

b) *Phương pháp chỉ rõ tính chất đặc trưng*.

Chỉ ra các thuộc tính của các phần tử mà dựa vào các thuộc tính ấy ta có thể nhận biết được một đối tượng nào đó có thuộc tập hợp hay không (các thuộc tính này gọi là các tính chất đặc trưng)

Nếu A là tập hợp tất cả các phần tử x có tính chất đặc trưng P thì ta viết

$$A = \{x \mid x \text{ có tính chất } P\} \text{ hay } A = \{x \mid P(x)\}.$$

Ví dụ:

1)Nếu A là tập hợp các số nguyên chẵn thì ta viết

$$A = \{n \in \mathbf{Z} \mid n \text{ chẵn}\}.$$

2) Nếu B là tập hợp các số tự nhiên có hai chữ số mà tổng của hai chữ số là 10 thì

$$B = \{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ có hai chữ số, tổng hai chữ số là } 10\},$$

nhờ các tính chất đặc trưng này, ta có thể biết được một phần tử nào đấy có thuộc B hay không, chẳng hạn $37 \in B$ còn $52 \notin B$.

1.3. Tập rỗng, tập đơn tử.

a) *Tập rỗng*. Ta gọi tập rỗng là tập hợp không chứa phần tử nào, ký hiệu là $\varnothing$.

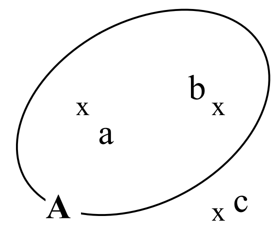
Ví dụ: Tập hợp các nghiệm dương của phương trình $x + 3 = 0$ là tập rỗng.

b) *Tập đơn tử*. Tập hợp có một phần tử gọi là tập đơn tử, tập đơn tử chỉ có phần tử a ta viết là {a}.

Ví dụ: Tập hợp các nghiệm (thực) của phương trình x + 3 = 0, tập hợp các đường thẳng đi qua hai điểm cho trước, … là các tập đơn tử .

1.4. Minh hoạ tập hợp bằng hình vẽ.

Một tập hợp thường được minh hoạ bởi một đường cong khép kín. Mỗi phần tử thuộc tập hợp được biểu diễn bởi một dấu gạch chéo ở bên trong đường cong, phần tử không thuộc tập hợp được biểu thị bởi dấu gạch chéo ở bên ngoài đường cong.



Trên hình bên, ta có : a, b ∈ A; c ∉ A.

BÀI TẬP

1. Hãy liệt kê phần tử của các tập hợp sau:

a) A là tập hợp các số tự nhiên có hai chữ số mà chữ số hàng đơn vị là 4.

b) B là tập hợp các số tự nhiên có hai chữ số mà tổng của hai chữ số đó là 12.

2. a)Hãy chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của các tập hợp sau:

A = {3, 6, 9, 12, 15},

B = {-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3},

C = {1, 4, 9, 16, 25}.

b) Hãy thêm vào mỗi tập hợp trên một phần tử nữa mà không làm thay đổi tính chất đặc trưng của các phần tử của tập hợp.

3. Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp A gồm các chữ số x sao cho số tự nhiên $\overline{17x4}$ chia hết cho 3.

§2. QUAN HỆ BAO HÀM GIỮA CÁC TẬP HỢP

2.1. Quan hệ bao hàm - Tập con.

Định nghĩa. Cho hai tập hợp A và B. Ta nói A là tập con (hay bộ phận) của B nếu mọi phần tử của A đều là phần tử của B, ký hiệu là A ⊂ B.

Khi $A \subset B$ ta nói A bao hàm trong B (hay A con B) hoặc B bao hàm A (hay B chứa A).

Quan hệ $A \subset B$ gọi là quan hệ bao hàm.

Ví dụ:

1) Nếu A là tập hợp các học sinh nữ trong một lớp và B là tập hợp các học sinh trong lớp đó thì $A \subset B$.

2) Giả sử C là tập hợp các nghiệm của phương trình $x - 1 = 0$ và D là tập hợp các nghiệm của phương trình $x^2 - 5x + 4 = 0$, ta có $C \subset D$.

3) Gọi T là tập hợp các tứ giác và V là tập hợp các hình vuông trong mặt phẳng, thế thì $V \subset T$.

Chú ý:

- Không phải giữa hai tập con nào cũng có quan hệ bao hàm, chẳng hạn giữa hai tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$ và $B = \{a, b, e, f, g\}$ không có quan hệ bao hàm.

- Ta quy ước $\varnothing$ là tập con của mọi tập hợp.

2.2. Hai tập hợp bằng nhau.

Định nghĩa. Hai tập hợp A và B gọi là bằng nhau nếu $A \subset B$ và $B \subset A$, ký hiệu là $A = B$.

Nói cách khác, hai tập hợp A và B là bằng nhau nếu mỗi phần tử của A là phần tử của B và ngược lại.

Như vậy, để chứng minh $A = B$ ta phải chứng minh: nếu $x \in A$ thì $x \in B$ và nếu $x \in B$ thì $x \in A$.

Ví dụ:

1) Nếu A là tập hợp các nghiệm của phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$ và $B=\{1, 2\}$ thì $A = B$.

2) Cho $A = \{n \in \mathbf{N} \mid n \vdots 6\}$ và $B = \{ n \in \mathbf{N} \mid n \vdots 2 \text{ và } n \vdots 3\}$.

Ta thấy:

- Nếu $n \in A$ tức là $n \vdots 6$ mà 2 và 3 là ước của 6, vậy $n \vdots 2$ và $n \vdots 3$. Điều đó có nghĩa là $n \in B$.

- Nếu $n \in B$, tức là $n \vdots 2$ và $n \vdots 3$. Ta thấy 2 và 3 nguyên tố cùng nhau nên n chia hết cho tích của chúng, nghĩa là $n \vdots 6$, hay $n \in A$.

Theo định nghĩa thì $A = B$.

2.3. Một số tính chất của quan hệ bao hàm.

Định lý. Quan hệ bao hàm có các tính chất sau:

a) Với mọi tập A ta có $A \subset A$ (tính chất phản xạ),

b) Nếu $A \subset B$ và $B \subset A$ thì $A = B$ (tính chất phản xứng),

c) Nếu $A \subset B$ và $B \subset C$ thì $A \subset C$ (tính chất bắc cầu).

Chứng minh.

Tính chất a) suy trực tiếp từ định nghĩa tập con.

Tính chất b) có từ định nghĩa hai tập hợp bằng nhau.

Bây giờ ta chứng minh tính chất c).

Giả sử x là một phần tử tùy ý thuộc A. Vì $A \subset B$ nên $x \in B$, mặt khác $B \subset C$ nên ta lại có được $x \in C$.

Vậy với mọi $x \in A$ ta đều suy ra được $x \in C$, tức là $A \subset C$.

Tính chất a) chứng tỏ một tập hợp là tập con của chính nó.

Như vậy mỗi tập hợp khác $\varnothing$ luôn có ít nhất hai tập con là $\varnothing$ và chính nó, hai tập con này gọi là các tập con tầm thường, các tập con không tầm thường gọi là tập con thực sự.

2.4. Tập hợp các tập con của một tập hợp.

Cho tập hợp A. Ký hiệu P(A) là tập hợp tất cả các tập con của A, nghĩa là

$$P(A) = \{X \mid X \subset A\}$$

Ví dụ:

1) Nếu A là tập hợp các học sinh của một lớp thì P(A) = {X | X là tập hợp một nhóm học sinh bất kỳ trong lớp}.

2) Cho $B = \{1,2\}$ thì $P(B) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

BÀI TẬP

1. Viết tất cả các tập con của mỗi tập hợp sau đây:

a) $A = \{a\}$.

b) $B = \{1, 2, 3\}$.

2. Hãy xét quan hệ giữa các tập hợp A, B dưới đây:

a) $A = \{n \in \mathbf{N} \mid n + 10 < 15\}$,

$B = \{n \in \mathbf{N} \mid n^2 < 9\}$.

b) A là tập hợp các bội tự nhiên của 3, B là tập hợp các bội tự nhiên của 6.

3. Chứng minh đẳng thức A = B với:

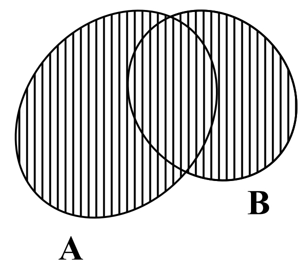
A là tập các hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau,

B là tập các hình bình hành có một góc vuông.

§3. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN CÁC TẬP HỢP

3.1. Phép hợp.

Định nghĩa. Cho hai tập hợp A và B. Hợp của A và B là tập hợp tất cả các phần tử thuộc ít nhất một trong hai tập đó, ký hiệu là $A \cup B$.



Ta có thể viết:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$$

hay $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ hoặc $x \in B$.

Trên hình bên, phần gạch chéo biểu thị $A \cup B$.

Ví dụ:

1) Nếu $A = \{a, b, c, d\}$ và $B = \{a, b, e\}$ thì $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$.

2) Gọi A là tập hợp các số tự nhiên lẻ, B là tập hợp các số tự nhiên chẵn, khi đó $A \cup B = \mathbf{N}$.

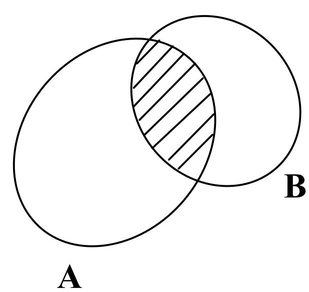
3) Nếu A tập hợp các nghiệm của phương trình $x^2 - 4 = 0$ và B là tập hợp các nghiệm của phương trình $x^2 - 5x + 4 = 0$ thì $A \cup B = \{-2, 1, 2, 4\}$.

Chú ý: Theo định nghĩa, $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ hoặc $x \in B$. Do đó $x \notin A \cup B$ khi và chỉ khi x không thuộc tập nào trong số hai tập A và B, tức là

$$x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \text{ và } x \notin B.$$

3.2. Phép giao.

Định nghĩa. Cho hai tập hợp A và B. Giao của A và B là tập hợp tất cả các phần tử đồng thời thuộc cả A và B, ký hiệu là $A \cap B$.



Ta có thể viết:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}$$

hay $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ và $x \in B$.

Trên hình bên, phần gạch chéo biểu thị $A \cap B$.

Ví dụ:

1) Cho A = {1, 2, 3, 4, 5} và B là tập hợp các số tự nhiên lẻ, khi đó $A \cap B = \{1, 3, 5\}$

2) Gọi A là tập hợp các nghiệm của phương trình f(x) = 0 và B là tập hợp các nghiệm của phương trình g(x) = 0 thì $A \cap B$ là tập hợp các nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

3) Nếu A là tập hợp các bội tự nhiên của 2 và B là tập hợp các bội tự nhiên của 3 thì $A \cap B$ là tập hợp các bội chung tự nhiên của 2 và 3, tức là các bội chung tự nhiên của 6.

Chú ý:

- Nếu A và B không có phần tử chung (phần tử vừa thuộc cả A và B), tức là $A \cap B = \varnothing$, thì ta nói A và B rời nhau.

- Theo định nghĩa, $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ và $x \in B$. Do đó $x \notin A \cap B$ khi và chỉ khi x không thuộc đồng thời cả A và B, nghĩa là x không thuộc ít nhất một trong hai tập A và B, hay $x \notin A$ hoặc $x \notin B$. Như vậy

$$x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \text{ hoặc } x \notin B.$$

3.3. Một số tính chất của phép hợp, phép giao.

Định lý. Với các tập A, B, C tùy ý ta luôn có:

1) Tính giao hoán:

$$A \cup B = B \cup A \text{ (của phép hợp)},$$
$$A \cap B = B \cap A \text{ (của phép giao)}.$$

2) Tính kết hợp:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \text{ (của phép hợp)},$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \text{ (của phép giao)}.$$

Các tính chất trên có thể chứng minh được dễ dàng bằng cách sử dụng trực tiếp các định nghĩa phép hợp, phép giao và sự bằng nhau của các tập hợp.

Chú ý:

- Từ tính chất kết hợp của phép hợp và phép giao ta có thể dùng ký hiệu $A \cup B \cup C$ (gọi là hợp của ba tập hợp A, B, C) thay cho $(A \cup B) \cup C$ hoặc $A \cup (B \cup C)$, dùng ký hiệu $A \cap B \cap C$ (gọi là giao của ba tập hợp A, B, C) thay cho $(A \cap B) \cap C$ hoặc $A \cap (B \cap C)$.

- Tương tự, ta có thể mở rộng các tính chất trên cho hợp và giao của nhiều tập hợp.

3.4. Liên hệ giữa phép hợp và phép giao.

Định lý. Với các tập A, B, C tùy ý ta có:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (1),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (2).$$

Chứng minh (1).

Giả sử $x \in A \cap (B \cup C)$, tức là $x \in A$ và $x \in B \cup C$. Do $x \in B \cup C$ có nghĩa là $x \in B$ hoặc $x \in C$ nên ta có:

$x \in A$ và $x \in B$ thì $x \in A \cap B$,

hoặc $x \in A$ và $x \in C$ thì $x \in A \cap C$.

Điều đó có nghĩa là $x \in A \cap B$ hoặc $x \in A \cap C$, tức là

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Ngược lại, giả sử $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Theo định nghĩa phép hợp suy ra $x \in A \cap B$ hoặc $x \in A \cap C$. Mặt khác, theo định nghĩa phép giao ta có:

$x \in A \cap B$ thì $x \in A$ và $x \in B$,

hoặc $x \in A \cap C$ thì $x \in A$ và $x \in C$.

Như vậy ta có $x \in A$ và x thuộc ít nhất một trong hai tập B, C, hay $x \in A$ và $x \in B \cup C$. Điều này có nghĩa là $x \in A \cap (B \cup C)$.

Tương tự ta chứng minh được đẳng thức (2).

Công thức (1) cho thấy phép giao phân phối đối với phép hợp, công thức (2) cho thấy phép hợp phân phối đối với phép giao.

3.5. Phép trừ.

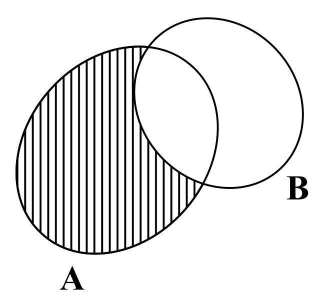
Định nghĩa. Cho hai tập hợp A và B. Hiệu của A và B là tập hợp tất cả các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B, ký hiệu $A \setminus B$ hoặc $A - B$.

Ta có thể viết:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}$$

hay $x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A$ và $x \notin B$.

Trên hình bên, phần gạch chéo biểu thị $A \setminus B$.



Ví dụ:

1) Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ và $B = \{x \in \mathbf{N} \mid x$ là ước của $30\}$ thì khi đó $A \setminus B = \{4\}$ còn $B \setminus A = \{6, 10, 15, 30\}$.

2) Nếu A là tập hợp các tam giác vuông, B là tập hợp các tam giác cân thì $A \setminus B$ là tập hợp các tam giác vuông mà không cân, $B \setminus A$ là tập hợp các tam giác cân mà không vuông.

Chú ý:

- Nếu A và B là các tập hợp rời nhau ($A \cap B = \varnothing$) thì $A \setminus B = A$ và $B \setminus A = B$.

- Hiệu của hai tập hợp nói chung không có tính đối xứng, tức là $A \setminus B \neq B \setminus A$.

- Trong trường hợp $B \subset A$ thì $A \setminus B$ còn được ký hiệu là $C_B A$ và gọi là phần bù của B trong A.

Chẳng hạn, nếu xét trong tập hợp số tự nhiên **N** thì phần bù của tập hợp các số tự nhiên chẵn là tập hợp các số tự nhiên lẻ.

- Từ định nghĩa phép trừ ta có thể viết:

$$x \notin A \setminus B \Leftrightarrow x \notin A \text{ hoặc } x \in B.$$

3.6. Sự liên quan giữa phép trừ với phép hợp và phép giao.

Định lý. Với các tập hợp A, B, C tùy ý ta có:

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \quad (1),$$

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \quad (2).$$

Chứng minh (1).

Giả sử $x \in A \setminus (B \cup C)$. Điều đó có nghĩa là $x \in A$ và $x \notin B \cup C$.

Vì $x \notin B \cup C$ nên $x \notin B$ và $x \notin C$.

Như vậy $x \in A$, $x \notin B$ và $x \notin C$. Từ đó suy ra $x \in A \setminus B$ và $x \in A \setminus C$, nghĩa là $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Ngược lại, giả sử $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. Điều đó có nghĩa là $x \in A \setminus B$ và $x \in A \setminus C$. Suy ra $x \in A$, $x \notin B$ và $x \notin C$. Tức là $x \in A$ và $x \notin B \cup C$. Do đó $x \in A \setminus (B \cup C)$.

Chứng minh đẳng thức (2) tương tự.

BÀI TẬP

1. A là tập hợp các số tự nhiên có hai chữ số mà chữ số hàng đơn vị gấp đôi chữ số hàng chục. B là tập hợp các số tự nhiên nhỏ hơn 50 và chia hết cho 8.

Tìm $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

2. Cho $A = \{x \mid \overline{8x5} \,\vdots\, 9\}$, $B = \{x \mid \overline{514x} \,\vdots\, 3\}$. Tìm $A \cup B$. $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

3. Trong tập hợp P các điểm của mặt phẳng, cho hai điểm A, B và trung điểm O của AB. Gọi X là tập hợp các điểm M sao cho $MA \leq MB$; Y là tập hợp các điểm M sao cho $OM \leq \frac{AB}{2}$.

Hãy xác định các tập $X \cup Y$, $X \cap Y$, $X \setminus Y$, $Y \setminus X$ trên hình vẽ.

4. Cho A, B là các tập hợp tuỳ ý. Hãy minh hoạ đẳng thức sau bằng hình vẽ và sau đó chứng minh:

a) $A \setminus B) = A \setminus (A \cap B)$

b) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$

5. Cho hai tập tùy ý A, B. Chứng minh rằng:

a) $A \cap B = A$ khi và chỉ khi $A \subset B$.

b) $A \cup B = B$ khi và chỉ khi $A \subset B$.

6. Thống kê tình hình tự bồi dưỡng trình độ trong 100 giáo viên cho thấy: 33 người học ngoại ngữ, 40 người học tin học, 42 người bồi dưỡng chuyên môn. Trong số đó có 8 người vừa học ngoại ngữ vừa học tin học, 10 người vừa bồi dưỡng chuyên môn vừa học ngoại ngữ, 5 người vừa học tin học vừa bồi dưỡng chuyên môn và 3 người bồi dưỡng cả 3 môn.

Hỏi có bao nhiêu người chỉ học ngoại ngữ, chỉ học tin học, chỉ bồi dưỡng chuyên môn và bao nhiêu người không bồi dưỡng môn nào?

§4. QUAN HỆ

4.1. Tích Đề các của các tập hợp.

a) *Cặp sắp thứ tự*.

Cho a, b là hai đối tượng bất kỳ. Từ hai đối tượng này ta thành lập được một đối tượng mới, ký hiệu là (a, b) và gọi là cặp (a, b).

Hai cặp (a, b) và (c, d) gọi là bằng nhau khi và chỉ khi $a = c$ và $b = d$.

Như vậy, nếu $a \neq b$ thì (a, b) và (b, a) là hai cặp khác nhau.

Điều đó nói lên rằng, trong một cặp người ta có thể xét đến thứ tự của các vật: (a, b) là một cặp sắp thứ tự hai phần tử a và b, a là phần tử đứng trước, b là phần tử đứng sau.

b) *Tích Đề các.*

Định nghĩa. Cho hai tập hợp A và B. Tích Đề các của A và B là tập hợp tất cả các cặp có thứ tự (a,b), trong đó $a \in A$ và $b \in B$, ký hiệu là $A \times B$.

Ta có thể viết:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Ví dụ: Cho $A = \{a, b, c\}$ và $B = \{m, n\}$, khi đó

$$A \times B = \{(a, m), (b, m), (c, m), (a, n), (b, n), (c, n)\},$$

$$B \times A = \{(m, a), (m, b), (m, c), (n, a), (n, b), (n, c)\}.$$

Chú ý:

- Tích Đề các nói chung không có tính chất giao hoán: nếu $A \neq B$ thì $A \times B \neq B \times A$.

- Tích Đề các không có tính chất kết hợp: với ba tập hợp A, B, C khác rỗng ta có $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$.

- Trong trường hợp $A = B$ thì $A \times A$ còn được ký hiệu là A^2 và gọi là bình phương Đề các của A.

- Ta có thể mở rộng định nghĩa tích Đề các cho nhiều tập hợp: tích Đề các của n tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là tập hợp tất cả các phần tử có thứ tự $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, trong đó $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$.

4.2. Quan hệ hai ngôi.

Định nghĩa. Cho A là tập hợp tùy ý khác rỗng. Mỗi tập con S của bình phương Đề các $A \times A$ gọi là một quan hệ hai ngôi trên A.

Nếu $(a, b) \in S$ thì ta nói a có quan hệ S với b và viết aSb. Như vậy

$$\forall a, b \in A,\ aSb \Leftrightarrow (a, b) \in S.$$

Ví dụ:

1) Trên tập hợp các số nguyên **Z**, quan hệ "bé thua hoặc bằng" xác định bởi tập con

$$S_1 = \{(a, b) \in \mathbf{Z}^2 \mid a \leq b\}.$$

2) Quan hệ "chia hết cho" trong $\mathbf{N}^* = \mathbf{N}\backslash\{0\}$ được xác định bởi tập con

$$S_2 = \{(m, n) \in \mathbf{N}^{*2} \mid m \,\vdots\, n\}.$$

3) Trong tập hợp D gồm các đường thẳng của mặt phẳng, quan hệ "vuông góc với nhau" xác định bởi tập con:

$$S_3 = \{(a, b) \in D^2 \mid a \perp b\}.$$

4) Trong tập hợp A gồm các học sinh trong một lớp, quan hệ "cùng họ" xác định bỏi tập con

$$S_4 = \{(x, y) \mid x, y \in A, x, y \text{ cùng họ}\}.$$

4.3. Một số tính chất thường gặp của quan hệ hai ngôi.

a) *Tính phản xạ*. Quan hệ hai ngôi S trên tập hợp A gọi là có tính chất phản xạ nếu $\forall a \in A$ ta có aSa (a có quan hệ S với chính nó).

Ví dụ: Trong các ví dụ ở mục 4.2, các quan hệ S_1, S_2, S_4 có tính chất phản xạ; quan hệ S_3 không có tính chất phản xạ.

b) *Tính chất đối xứng*. Quan hệ hai ngôi S trên tập hợp A gọi là có tính chất đối xứng nếu $\forall a, b \in A$ mà aSb thì luôn suy ra được bSa.

Ví dụ: Trong các ví dụ ở mục 4.2, các quan hệ S_3, S_4 có tính chất đối xứng; các quan hệ S_1, S_2 không có tính chất đối xứng.

c) *Tính chất phản đối xứng (phản xứng)*. Quan hệ hai ngôi S trên tập hợp A gọi là có tính chất phản đối xứng nếu $\forall a, b \in A$ mà aSb và bSa thì luôn suy ra được a = b.

Ví dụ: Trong các ví dụ ở mục 4.2, các quan hệ S_1, S_2 có tính chất phản đối xứng; các quan hệ S_3, S_4 không có tính chất phản đối xứng.

d) *Tính chất bắc cầu*. Quan hệ hai ngôi S trên tập hợp A gọi là có tính chất bắc cầu nếu $\forall a, b, c \in A$ mà aSb và bSc thì luôn suy ra được aSc.

Ví dụ: Trong các ví dụ ở mục 4.2, các quan hệ S_1, S_2, S_4 có tính chất bắc cầu; các quan hệ S_3 không có tính chất bắc cầu.

4.4. Quan hệ tương đương.

a) *Định nghĩa*. Quan hệ hai ngôi S trên tập hợp A gọi là quan hệ tương đương nếu nó có các tính chất: phản xạ, đối xứng, bắc cầu.

Ví dụ: Trong các ví dụ ở mục 4.2, quan hệ S_4 (quan hệ “cùng họ”) là quan hệ tương đương; các quan hệ S_1, S_2, S_3 là không tương đương.

Chú ý:

- Nếu S là quan hệ tương đương ta thường thay S bởi ký hiệu ~ (a ~ b, đọc là “a tương đương với b”)
- Do tính chất đối xứng nên nếu a ~ b thì có thể viết b ~ a.

b) *Lớp tương đương*. Trên tập hợp A cho quan hệ tương đương ~. Giả sử a là một phần tử nào đó thuộc A. Ký hiệu:

$$[a] = \{x \in A \mid x \sim a\}$$

và gọi tập hợp này là lớp tương đương của a.

Từ tính chất phản xạ của quan hệ ~ suy ra $a \in [a]$.

Ví dụ:

1) Xét quan hệ tương đương “có cùng số dư trong phép chia cho 3” trên tập hợp các số tự nhiên **N**. Với số tự nhiên n bất kỳ thuộc **N**, [n] là tập hợp các số tự nhiên có cùng số dư với n trong phép chia cho 3.

Chẳng hạn lấy n = 4. Số dư trong phép chia 4 cho 3 là 1. Vậy

$$[4] = \{1, 4, 7, 10, \ldots\}.$$

2) Với quan hệ tương đương “cùng họ” của tập hợp các học sinh trong một lớp (quan hệ S_4 ở mục 4.2), lớp tương đương của một học sinh bất kỳ là tập hợp gồm học sinh đó và tất cả các học sinh khác cùng họ trong lớp.

Định lý. Trên tập hợp A cho quan hệ tương đương ~. Giả sử x_1, x_2 là hai phần tử bất kỳ thuộc A. Ta có:

1) $[x_1] = [x_2] \Leftrightarrow x_1 \sim x_2$,

2) Nếu $[x_1] \neq [x_2]$ thì $[x_1] \cap [x_2] = \varnothing$.

Chứng minh.

1) Giả sử $[x_1] = [x_2]$. Do $x_1 \in [x_1]$ nên suy ra $x_1 \in [x_2]$, nghĩa là $x_1 \sim x_2$.

Ngược lại, giả sử $x_1 \sim x_2$. Lấy x bất kỳ thuộc $[x_1]$ thì $x \sim x_1$, mà $x_1 \sim x_2$ nên theo tính chất bắc cầu suy ra $x \sim x_2$ nên $x \in [x_2]$. Do đó $[x_1] \subset [x_2]$. Hoàn toàn tương tự ta cũng chứng minh được $[x_2] \subset [x_1]$. Vậy $[x_1] = [x_2]$.

2) Với $[x_1] \neq [x_2]$ ta giả sử $[x_1] \cap [x_2] \neq \varnothing$. Suy ra tồn tại $x \in X$ sao cho $x \in [x_1]$ và $x \in [x_2]$. Do $x \in [x_1]$ nên $x \sim x_1$, lại do $x \in [x_2]$ nên $x \sim x_2$. Theo tính chất bắc cầu suy ra $x_1 \sim x_2$. Từ đây áp dụng tính chất 1) ta được $[x_1] = [x_2]$, điều này trái với giả thiết $[x_1] \neq [x_2]$.

Vậy nếu $[x_1] \neq [x_2]$ thì $[x_1] \cap [x_2] = \varnothing$.

Như vậy, một quan hệ tương đương trên tập hợp A chia A thành các tập con là các lớp tương đương rời nhau. Nghĩa là mỗi phần tử bất kỳ của A đều thuộc và chỉ thuộc một trong các tập con ấy và các phần tử trong cùng một tập con thì tương đương với nhau.

Ví dụ:

1) Quan hệ "có cùng số dư trong phép chia cho 3" chia **N** thành ba tập con là [0], [1], [2].

[0] là tập hợp các số tự nhiên chia hết cho 3: [0] = {0, 3, 6, 9, …},

[1] là tập hợp các số tự nhiên chia 3 còn dư 1: [1] = {1, 4, 7, 10, …},

[2] là tập hợp các số tự nhiên chia 3 còn dư 1: [2] = {2, 5, 8, 11, …}.

2) Quan hệ "cùng họ" của các học sinh trong một lớp chia lớp đó thành các tập con gồm những học sinh cùng họ.

c) *Tập thương*. Tập hợp các lớp tương đương của A với quan hệ ~ gọi là tập thương của A theo quan hệ đó, ký hiệu A/~:

$$A/\sim \; = \{[a] \mid a \in A\}.$$

Ví dụ: Xét quan hệ "có cùng số dư trong phép chia cho 3" trên **N**, ta có

$$N/\sim \; = \{[0], [1], [2]\}\}.$$

4.5. Quan hệ thứ tự.

a) *Định nghĩa*. Quan hệ 2 ngôi S trên tập A gọi là quan hệ thứ tự nếu nó có các tính chất: phản xạ, phản đối xứng, bắc cầu.

Ví dụ: Trong các ví dụ ở mục 4.2, các quan hệ S_1("bé thua hoặc bằng") và S_2 ("chia hết cho") là các quan hệ thứ tự.

Chú ý: Quan hệ bé thua hoặc bằng (≤) thông thường trên các tập hợp số là quan hệ thứ tự. Quan hệ này điển hình đến nỗi người ta mượn ký hiệu ≤ để chỉ thứ tự ngay cả trong trường hợp tổng quát.

Trong trường hợp tổng quát, khi S là một quan hệ thứ tự, người ta ký hiệu $a \le b$ thay cho aSb và đọc là "a bé thua hoặc bằng b" hay "a đứng trước b". Khi đó ta cũng viết $b \ge a$ và đọc "b lớn hơn hoặc bằng a". Để tránh nhầm lẫn, khi nào ≤ mang ý nghĩa thông thường ta sẽ nói rõ.

b) *Tập sắp tứ tự.*

Khi tập A được trang bị một quan hệ thứ tự S thì ta nói A là một tập sắp thứ tự (theo quan hệ thứ tự đó).

Trong một tập sắp thứ tự có thể xảy ra hai trường hợp:

Trường hợp 1: Mọi cặp phần tử a, b của A đều nằm trong quan hệ thứ tự đó. Nói khác đi $\forall a, b \in A$ nhất thiết phải có $a \le b$ hoặc $b \le a$.

Trường hợp này A được gọi là tập sắp thứ tự toàn phần.

Trường hợp 2: Không phải mọi cặp thuộc A đều có thể so sánh được, nghĩa là có cặp a, b sao cho ta không có cả $a \le b$ lẫn $b \le a$.

Trường hợp này A được gọi là tập sắp thứ tự bộ phận.

Ví dụ:

1) Các tập hợp số với quan hệ ≤ thông thường là tập hợp sắp thứ tự toàn phần.

2) Tập $\mathbf{N}^*$ với quan hệ ⋮ (chia hết cho) không là tập sắp thứ tự toàn phần mà chỉ là tập sắp thứ tự bộ phận. Chẳng hạn như hai số 5 và 17 không so sánh được theo quan hệ "chia hết cho".

Chú ý: Với cùng một tập A ta có thể trang bị nhiều quan hệ thứ tự; với quan hệ này có thể A là tập sắp thứ tự toàn phần nhưng với quan hệ khác A chỉ la tập sắp thứ tự bộ phận.

c) Phần tử lớn nhất, nhỏ nhất.

Cho A là một tập sắp thứ tự với quan hệ thứ tự là ≤, M là một tập con của A.

Phần tử $m \in M$ gọi là phần tử nhỏ nhất của M nếu ta luôn có $m \le x$, $\forall x \in M$.

Phần tử $m \in M$ gọi là phần lớn nhất của M nếu ta luôn có $x \le m$, $\forall x \in M$.

Ví dụ: Trên $\mathbf{N}^*$ với quan hệ "chia hết cho" tập A = {1, 2, 5, 7, 35, 70}. Hiển nhiên $\mathbf{N}^*$ là tập sắp thứ tự với quan hệ đã cho và $A \subset \mathbf{N}^*$.

Ta thấy 1 là phần tử nhỏ nhất của A và 70 là phần tử lớn nhất của A.

Chú ý: Không phải mọi tập hợp con của một tập sắp thứ tự đều có phần tử nhỏ nhất, phần tử lớn nhất. Chẳng hạn cho $\mathbf{N}^*$ với quan hệ "chia hết cho", với tập A = {1, 2, 4, 70}chỉ có 1 là phần tử nhỏ nhất, không có phần tử lớn nhất.

BÀI TẬP

1. Giả sử A là tập hợp tất cả các người, ta xác định các quan hệ S_1, S_2, S_3 như sau:

a) xS_3y nếu người x là con của người y

b) xS_1y nếu người x không nhiều tuổi hơn người y.

c) xS_2y nếu người x cùng giới tính với người y.

Hãy xét xem các quan hệ trên có những tính chất gì?

2. Trên tập hợp **N** các số tự nhiên, xác định quan hệ S như sau:

$$a \; S \; b \;\Leftrightarrow\; a + b \text{ là số chẵn.}$$

Xét xem quan hệ S có những tính chất nào?

3. Trên tập hợp **Z** các số nguyên xác định các quan hệ S như sau:

$$\text{với } a, b \in \mathbf{Z}\text{: } aSb \;\Leftrightarrow\; |a - b| \,\vdots\, 2.$$

Hãy xét xem quan hệ S này có những tính chất gì?

4. Trong tập **R** các số thực, cho quan hệ hai ngôi S như sau:

$$x \; S \; y \Leftrightarrow |x| = |y|$$

a) Chứng minh rằng S là một quan hệ tương đương trong **R**

b) Xác định lớp tương đương [a] với a là một số thực bất kỳ.

5. Cho tập X gồm tất cả các hợp điểm trên mặt phẳng, O là một điểm cố định cho trước thuộc X. Trên tập X, quan hệ S được xác định như sau:

$$M \; S \; N \;\Leftrightarrow\; OM = ON.$$

a) Chứng minh rằng S là một quan hệ tương đương trên X

b) Hãy xác định lớp tương đương [A] với A là một điểm bất kỳ

c) Xác định tập thương X/S.

6. a) Trong tập các số thực **R** xét quan hệ T như sau:

$$\text{với } x, y \in \mathbf{R}: \; xTy \;\Leftrightarrow\; x^3 \le y^3 \; (\le \text{ theo nghĩa thông thường}).$$

Chứng minh rằng quan hệ T quan hệ thứ tự. T có phải là quan hệ thứ tự tuyến tính không?

b) Trong tập các số thực **R** xét quan hệ T như sau:

với x, y $\in$ **R** : xTy $\Leftrightarrow$ $x^2 \leq y^2$ ($\leq$ theo nghĩa thông thường).

Hãy xét xem T có phải là quan hệ thứ tự hay không.

7. Xét tập hợp sắp thứ tự **N** với quan hệ thứ tự $\leq$ và bộ phận A của **N** với A = {2, 3, 4, 5, 6, 7}.

Hãy tìm các phần tử lớn nhất, nhỏ nhất, chặn trên, chặn dưới, chặn trên nhỏ nhất, chặn dưới lớn nhất, phần tử tối đại, phần tử tối tiểu của bộ phận A.

§5. ÁNH XẠ

Trong §4 ta đã thấy mỗi tập con của tập tích Đề các biểu thị một quan hệ giữa các phần tử của tập X với các phần tử của tập Y.

Ta cũng đã xét trường hợp riêng khi tập Y trùng với tập X và đã đi tới khái niệm quan hệ hai ngôi trên X.

Trong phần này, ta sẽ xét một trường hợp riêng khác của khái niệm quan hệ để đi đến khái niệm ánh xạ.

Giả sử cho quan hệ f trên X×Y.

Trong trường hợp tổng quát, nói chung với mỗi x $\in$ X, tập các phần tử y $\in$ Y có quan hệ f với x (tức là tập hợp $\{y \in Y \mid x\ f\ y\}$) có thể là rỗng hoặc có thể có nhiều phần tử.

Trong trường hợp đặc biệt, khi mà ứng với mỗi phần tử x $\in$ X, tập các phần tử y $\in$ Y mà x f y có một và chỉ một phần tử thì quan hệ f được gọi là một ánh xạ từ X đến Y.

Như vậy, ánh xạ f từ X đến Y là một quan hệ f trên X×Y có tính chất “với mọi phần tử x $\in$ X bao giờ cũng có một và chỉ một phần tử y $\in$ Y sao cho x có quan hệ f với y”.

Nói khác đi, việc cho một ánh xạ từ X đến Y là việc cho một quy tắc ứng mỗi phần tử x $\in$ X với một phần tử y hoàn toàn xác định trong Y.

Ta đi đến khái niệm ánh xạ và các khái niệm liên quan.

5.1. Các khái niệm cơ bản và ví dụ về ánh xạ.

Định nghĩa.

Cho X và Y là hai tập hợp khác rỗng. Một ánh xạ từ X đến Y là một quy tắc đặt tương ứng mỗi phần tử $x \in X$ với một phần tử duy nhất $y \in Y$.

Khi y là phần tử ứng với x qua ánh xạ f thì ta gọi y là ảnh của x qua ánh xạ f.

Ánh xạ thường được ký hiệu bằng các chữ f, g, h, ... Để chỉ ánh xạ f từ X đến Y mà phần tử $x \in X$ được đặt tương ứng với phần tử $y \in Y$ ta viết

$$\begin{aligned} f : \ & X \to Y \\ & x \mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

hoặc

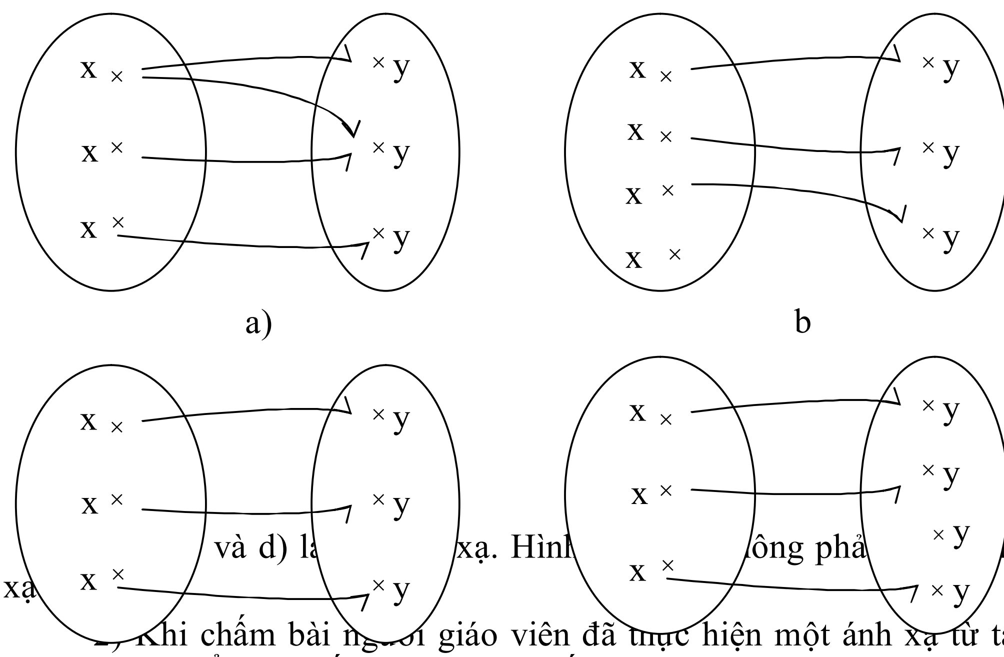
$$\begin{aligned} & X \xrightarrow{f} Y \\ & x \mapsto y = f(x). \end{aligned}$$

X gọi là tập nguồn (hay miền xác định), Y gọi là tập đích (hay miền giá trị).

Hai ánh xạ $f : X \to Y$ và $g : X \to Y$ gọi là bằng nhau nếu $f(x) = g(x), \forall x \in X$.

Ví dụ:

1) Cho các tương ứng bởi các hình vẽ sau



a) b c) d

... và d) là ... xạ. Hình ... không phả[i] ... [á]nh xạ.

2) Khi chấm bài người giáo viên đã thực hiện một ánh xạ từ tập hợp các bài kiểm tra đến tập hợp các số {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} (cho điểm nguyên theo thang điểm 10). Ánh xạ này ứng mỗi bài với một con điểm.

3) Phép cộng trên tập hợp số tự nhiên là một ánh xạ từ tập hợp $\mathbf{N}\times\mathbf{N}\to\mathbf{N}$. Ánh xạ này ứng mỗi cặp số tự nhiên (x, y) với một số là x + y:

$$\begin{aligned} \mathbf{N} \times \mathbf{N} &\to \mathbf{N} \\ (x, y) &\mapsto x + y. \end{aligned}$$

4) Cho tập hợp X bất kỳ. Tương ứng mỗi phần tử $x \in X$ với chính nó là một ánh xạ từ tập X đến tập X.

Ánh xạ này thường được ký hiệu là 1_X hay id_X và gọi là ánh xạ đồng nhất:

$$\begin{aligned} 1_X : X &\to X \\ x &\mapsto x. \end{aligned}$$

5) Tương ứng mỗi phần tử x thuộc tập hợp các số thực **R** với phần tử 2x+1 là một ánh xạ từ **R** đến **R**:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &\to \mathbf{R} \\ x &\mapsto 2x + 1. \end{aligned}$$

Chú ý:

- Một phép tương ứng các phần tử của X với các phần tử của Y sẽ không là ánh xạ từ X đến Y khi có phần tử của X không có phần tử tương ứng trong Y, hoặc khi có phần tử của X ứng với hon một phần tử trong Y.

- Trong một ánh xạ, mỗi phần tử thuộc nguồn đều có ảnh duy nhất, nghĩa là nếu $f : X \to Y$ là một ánh xạ và $x_1 = x_2$ ($x_1, x_2 \in X$) thì phải có $f(x_1) = f(x_2)$, hoặc từ $f(x_1) \neq f(x_2)$ ta phải có $x_1 \neq x_2$.

- Mỗi phần tử của nguồn có một ảnh duy nhất nhưng có thể hai hay nhiều phần tử của nguồn có chung một ảnh. Ngoài ra, cũng có thể có phần tử của tập đích không là ảnh của bất kỳ phần tử nào trong tập nguồn.

5.2. Ảnh và tạo ảnh.

a) *Định nghĩa*. Cho ánh xạ $f : X \to Y$.

- Giả sử $A \subset X$. Tập con của Y gồm tất cả các ảnh của mọi phần tử thuộc A gọi là ảnh của A qua ánh xạ f, ký hiệu là f(A):

$$f(A) = \{ f(x) \mid x \in A\}.$$

- Giả sử $B \subset Y$. Tập con của X gồm tất cả các tạo ảnh của mọi phần tử thuộc B gọi là tạo ảnh toàn phần của B qua ánh xạ f, ký hiệu là $f^{-1}(B)$:

$$f^{-1}(B) = \{ x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Ví dụ: Cho ánh xạ $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto 2x + 1$.

Giả sử $A = \{-1, 0, \frac{1}{3}, 2\}$ và $B = \{0, 1, 2\}$.

Khi đó: $f(A) = \{-1, 1, \frac{5}{3}, 5\}$,

$f^{-1}(B) = \{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$.

b) *Định lý*. Cho ánh xạ $f : X \to Y$.

- Với hai tập con tùy ý A, B của X ta có:

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

- Với hai tập con tùy ý A, B của Y ta có:

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

Ta có thể chứng minh các đẳng thức trên một cách dễ dàng.

BÀI TẬP

1. Giả sử X là tập hợp tất cả các người trên trái đất (kể cả người đã chết). Các quy tắc sau có phải là ánh xạ từ X đến X không?

a) Quy tắc ứng mỗi người với mẹ đẻ của mình

b) Quy tắc ứng mỗi người với anh trai của mình

c) Quy tắc ứng mỗi người với con đẻ của mình.

2) Cho T là tập hợp tất cả các tam giác và O là tập hợp các đường tròn.

a) Quy tắc ứng mỗi tam giác với đường tròn ngoại tiếp của nó có phải là ánh xạ từ T đến O không?

b) Quy tắc ứng mỗi đường tròn với tam giác nội tiếp nó có phải là ánh xạ từ O đến T không?

3. Giải thích tại sao các quy tắc dưới đây không phải là ánh xạ từ **R** đến **R**:

a) Quy tắc ứng mỗi số với nghịch đảo của nó.

b) Quy tắc ứng mỗi số với căn bậc hai của nó.

4. a) Quy tắc "Lấy một số tự nhiên nhân với 4, được bao nhiêu trừ đi 10" có phải là một ánh xạ từ **N** đến **N** không? Vì sao?

b) Muốn cho quy tắc đó trở thành một ánh xạ từ **N** thì phải thay đổi tập đích (miền giá trị) như thế nào?

c) Muốn cho quy tắc đó trở thành một ánh xạ đến **N** thì phải thay đổi tập nguồn (miền xác định) như thế nào?

5. Cho ánh xạ $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$
$n \mapsto 4n + 5$

a) Tìm f(1), f(5), f(25).

b) Tìm $f^{-1}(4)$, $f^{-1}(9)$, $f^{-1}(15)$.

6. Cho ánh xạ $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$
$x \mapsto x^2 - 3x + 1$.

Hãy tìm:

a) f(0), f(1) và f(-1)

b) f([-1, 2])

c) $f^{-1}(1)$ và $f^{-1}(-1)$

d) $f^{-1}([-1,1]$

§6. CÁC ÁNH XẠ ĐẶC BIỆT TÍCH CÁC ÁNH XẠ - ÁNH XẠ NGƯỢC

6.1. Đơn ánh – Toàn ánh – Song ánh.

Cho ánh xạ $f : X \to Y$. Trong trường hợp chung, có thể xảy ra các tình huống sau:

- Hai hoặc nhiều phần tử của X có chung một ảnh trong Y (1).

- Có những phần tử của Y không là ảnh của phần tử nào thuộc X (2).

Trong mục này ta sẽ xét các trường hợp đặc biệt mà các tình huống trên không xảy ra.

a) *Đơn ánh*. Khi tình huống (1) không xảy ra thì f gọi là đơn ánh.

Định nghĩa. Ánh xạ $f : X \to Y$ gọi là đơn ánh nếu với hai phần tử khác nhau x_1, x_2 của X ta luôn có $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Định nghĩa trên có thể phát biểu cách khác : $f : X \to Y$ gọi là đơn ánh nếu từ $f(x_1) = f(x_2)$ ta luôn có $x_1 = x_2$.

Ví dụ:

1) Dễ thấy ánh xạ đồng nhất $1_X : X \to X$, $x \mapsto x$ là đơn ánh.

2) Ánh xạ $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^3$ là đơn ánh vì với $x_1 \neq x_2$ thì $f(x_1) \neq f(x_2)$.

3) Ánh xạ $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2$ không phải là đơn ánh vì với $-x$ và x có cùng một ảnh là x^2.

b) *Toàn ánh*: Khi tình huống (2) không xảy ra thì f gọi là toàn ánh.

Định nghĩa. Ánh xạ $f : X \to Y$ gọi là toàn ánh nếu với mọi $y \in Y$ bao giờ cũng tồn tại $x \in X$ sao cho $f(x) = y$.

Ví dụ:

1) Ánh xạ đồng nhất $1_X : X \to X$, $x \mapsto x$ là toàn ánh.

2) Ánh xạ $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^3$ là toàn ánh vì $\forall y \in Y$ bao giờ cũng có $x = \sqrt[3]{y} \in X$ để cho $f(x) = (\sqrt[3]{y})^3 = y$.

3) Ánh xạ $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2$ không phải là toàn ánh vì các số thực âm không thể là bình phương của bất kỳ số thực nào.

Nếu ta thay tập đích bởi $\mathbf{R}^+$ (tập hợp các số thực không âm) thì g sẽ là toàn ánh.

c) *Song ánh*.

Định nghĩa. Ánh xạ $f : X \to Y$ gọi là toàn ánh nếu nếu nó vừa là đơn ánh, vừa là toàn ánh. Như vậy, f là một song ánh nếu với mọi $y \in Y$ có một và chỉ một $x \in X$ sao cho $f(x) = y$.

Song ánh $f : X \to Y$ còn gọi là ánh xạ một – một từ X lên Y.

Ví dụ: Qua các ví dụ ở phần a) và b) ta thấy ánh xạ đồng nhất

$$\begin{aligned} 1_X : X &\to X \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

và ánh xạ $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^3$ là các song ánh.

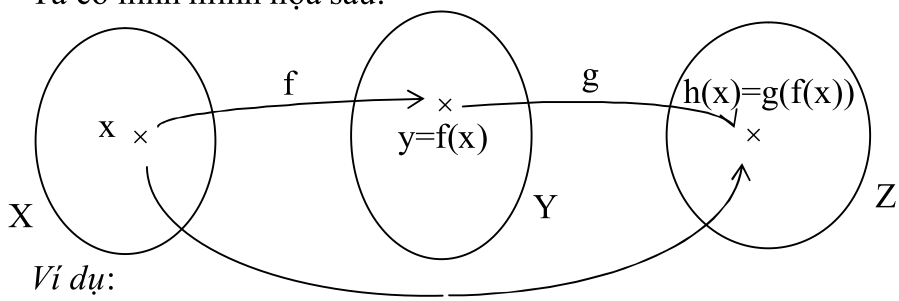
6.2. Tích các ánh xạ.

a) *Định nghĩa*. Cho hai ánh xạ $f : X \to Y$ và $g : Y \to Z$. Tích của hai ánh xạ f và g là ánh xạ $h : X \to Z$ được xác định như sau: $h(x) = g(f(x))$, $\forall x \in X$.

Tích của các ánh xạ f và g được ký hiệu là $g_o f$ hoặc gf, như vậy ta có

$$(g_o f)(x) = g(f(x)), \forall x \in X.$$

Ta có hình minh họa sau:



Ví dụ:

1) Với mọi ánh xạ $f : X \to Y$ ta luôn có $f_o 1_X = 1_{Y\,o} f = f$.

2) Cho $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ và $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$x \mapsto x^2 \qquad\qquad x \mapsto x^2 + 2x + 3$$

Khi đó $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^4 + 2x^2 + 3$,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 2x + 3) = (x^2 + 2x + 3)^2.$$

Chú ý:

- Tích các ánh xạ nói chung không có tính chất giao hoán: $f \circ g \neq g \circ f$.

- Ta có thể mở rộng tích ánh xạ cho nhiều ánh xạ.

b) *Một số tính chất.*

Định lý 1. Tích các ánh xạ có tính chất kết hợp, nghĩa là nếu $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ và $h : Z \to T$ thì $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Chứng minh.

Với mỗi $x \in X$ ta có

$$\begin{aligned}[h \circ (g \circ f)](x) &= h \circ ((g \circ f)(x)) \\ &= h(g(f(x)) \\ &= (h \circ g)(f(x)) \\ &= [(h \circ g) \circ f](x).\end{aligned}$$

Vậy $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Từ tính chất kết hợp của ánh xạ, thay cho $h \circ (g \circ f)$ và $(h \circ g) \circ f$ ta có thể viết $h \circ g \circ f$ và gọi đây là tích của ba ánh xạ f, g, h.

Định lý 2. Cho các ánh xạ $f : X \to Y$ và $g : Y \to T$. Khi đó:

1) Nếu f và g là các đơn ánh thì $g \circ f : X \to T$ cũng là đơn ánh,

2) Nếu f và g là các toàn ánh thì $g \circ f : X \to T$ cũng là toàn ánh,

3) Nếu f và g là các song ánh thì $g \circ f : X \to T$ cũng là song ánh.

Chứng minh.

1) Giả sử f, g là các đơn ánh. Để chứng minh h là đơn ánh ta phải chứng minh rằng với $x_1 \neq x_2$ thuộc X thì phải có $h(x_1) \neq h(x_2)$.

Thật vậy, vì f là đơn ánh nên từ $x_1 \neq x_2$ ta có $f(x_1) \neq f(x_2)$. Vì g là đơn ánh nên từ $f(x_1) \neq f(x_2)$ ta có $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$, nghĩa là $h(x_1) \neq h(x_2)$.

2) Giả sử f, g là các toàn ánh. Để chứng minh h toàn ánh ta phải chứng minh $\forall t \in T$ sẽ tồn tại $x \in X$ sao cho $h(x) = t$.

Thật vậy, vì g toàn ánh nên $\forall t \in T$ sẽ tồn tại $y \in Y$ sao cho $g(y) = t$. Vì f toàn ánh nên có $x \in X$ sao cho $y = f(x)$.

Suy ra tồn tại $x \in X$ sao cho $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = t$.

6.3. Ánh xạ ngược.

a) *Định nghĩa*. Cho $f : X \to Y$ là song ánh. Với mỗi $y \in Y$ tồn tại duy nhất phần tử $x \in X$ sao cho $f(x) = y$. Ánh xạ $f^{-1} : Y \to X$ đặt tương ứng phần tử y với phần tử x gọi là ánh xạ ngược của f. Như vậy

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y.$$

Dễ thấy ánh xạ ngược f^{-1} của song ánh f cũng là một song ánh.

Ví dụ:

1) Dễ dàng thấy rằng hai ánh xạ

$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto 2x + 3$ và $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \dfrac{x-3}{2}$

là hai ánh xạ ngược nhau.

2) Hai ánh xạ $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$, $x \mapsto a^x$ và $g : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \log_a x$ (trong đó $a > 0$, $a \neq 1$) là hai ánh xạ ngược nhau.

Thật vậy, $\forall x \in \mathbf{R}^+$: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\log_a x) = a^{\log_a x} = x$,

$\forall x \in \mathbf{R}$: $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(a^x) = \log_a(a^x) = x$.

b) *Một số tính chất.*

Định lý 1.

1) $(f^{-1})^{-1} = f$,

2) Nếu $f : X \to Y$ là song ánh thì $f \circ f^{-1} = 1_Y$, $f^{-1} \circ f = 1_X$.

Chứng minh.

1) Suy trực tiếp từ định nghĩa ánh xạ ngược.

2) Với mọi $x \in X$, đặt $y = f(x)$. Ta có

$$f^{-1}(y) = x$$

$\Rightarrow \quad f^{-1}(f(x)) = x$

$\Rightarrow \quad (f^{-1} \circ f)(x) = 1_X(x).$

Vậy $f^{-1} \circ f = 1_X$.

Theo 1) do $(f^{-1})^{-1} = f$ nên $f \circ f^{-1} = (f^{-1})^{-1} \circ f^{-1} = 1_Y$.

Định lý 2. Giả sử $g : Y \to X$ và $g' : Y \to X$ là các ánh xạ ngược của $f : X \to Y$. Khi đó $g = g'$.

Chứng minh.

Vì g và g' là ánh xạ ngược của f nên $g \circ f = 1_X$, $f \circ g' = 1_Y$. Từ đó ta có

$$g = g \circ 1_Y = g \circ (f \circ g') = (g \circ f) \circ g' = 1_X \circ g' = g'.$$

Như vậy, ánh xạ f nếu có ánh xạ ngược thì ánh xạ ngược là duy nhất.

BÀI TẬP

1) Giả sử X là tập hợp tất cả các người trên trái đất (kể cả người đã chết). Các quy tắc sau có phải là ánh xạ từ X đến X không? Nếu là ánh xạ thì chúng có phải là đơn ánh, toàn ánh, song ánh không?

a) Quy tắc f ứng mỗi người với mẹ đẻ của mình

b) Quy tắc g ứng mỗi người với anh trai của mình.

2. Trong các ánh xạ sau, ánh xạ nào là đơn ánh, toàn ánh, song ánh :

a) $f_1 : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$
$n \mapsto 2n$

b) $f_2 : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$
$n \mapsto n + 1$

c) $f_3 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$
$x \mapsto x^2$

d) $f_4 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$
$x \mapsto |x|$

3. Cho các ánh xạ:

a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ và $g : R \to R$
$x \mapsto 5x + 1$ $x \mapsto x^2 - 3$

b) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ và $g : R \to R$
$x \mapsto x^2 + 3x - 2$ $x \mapsto \sin x$

Hãy tìm các ánh xạ $g \circ f$ và $f \circ g$.

4. Tìm ánh xạ ngược của ánh xạ $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$
$x \mapsto 3x + 4.$

B. HƯỚNG DẪN TỰ HỌC CHƯƠNG I

I. MỤC ĐÍCH – YÊU CẦU

Chương I đề cập đến những cơ sở của lý thuyết tập hợp nhằm những mục đích sau:

1) Cung cấp cho người học những khái niệm và kiến thức cơ bản của lý thuyết tập hợp như: khái niệm tập hợp, các phép toán trên tập hợp, quan hệ hai ngôi, quan hệ tương đương, quan hệ thứ tự, ánh xạ, một số khái niệm của giải tích tổ hợp (chỉnh hợp lặp, chỉnh hợp, hoán vị, tổ hợp) để họ có thể tiếp thu được những kiến thức của bộ môn toán và PPDH toán; đồng thời qua đó, bước đầu trang bị cho người học một số quan điểm và tư tưởng của lý thuyết tập hợp – một ngành của toán học hiện đại, đem lại cho họ một tầm nhìn rộng hơn và sâu sắc hơn đối với nội dung và phương pháp của môn toán ở trường phổ thông nói chung và ở bậc học cơ sở nói riêng.
2) Rèn luyện cho người học sử dụng chính xác và thành thạo các ký hiệu và ngôn ngữ của lý thuyết tập hợp. Cùng với các ký hiệu và ngôn ngữ của logic toán, các ký hiệu và ngôn ngữ của lý thuyết tập hợp trước hết sẽ giúp cho người học đọc và hiểu các tài liệu toán học, sau đó giúp cho họ trình bày một cách chính xác, sáng sủa và dễ hiểu những kiến thức toán học trong khi học môn toán ở bậc đại học và giảng dạy môn toán ở trường phổ thông sau này.

Với những mục đích đã nêu trên, khi tự học chương I, người học cần chú ý một số điểm sau:

a. Người học phải học một cách tự giác, phải đào sâu suy nghĩ để hiểu được bản chất các khái niệm.
b. Phải phát biểu một cách chính xác các định nghĩa, định lý; sau đó phải trình bày một cách chính xác các chứng minh toán học.
c. Để thực hiện được hai yêu cầu trên, người học phải rèn cho mình một thói quen sử dụng một cách nghiêm túc và chính xác các ký hiêu toán học và ngôn ngữ tự nhiên trong khi trình bày một vấn đề của toán học.

II. NHỮNG KIẾN THỨC CẦN CHUẨN BỊ

Để có thể tự đọc và hiểu những khái niệm và kiến thức trình bày trong chương I và sau đó tự tìm tòi, học hỏi để hiểu sâu hơn nữa những khái niệm và kiến thức đó, người tự học cần ôn tập lại một số khái niệm và kiến thức cơ bản sau đây trong chương trình môn toán ở trường phổ thông.

1. Số tự nhiên và tính chất của số tự nhiên (xem sách giáo khoa Toán bậc tiểu học và Số học lớp 6).
2. Số nguyên, số hữu tỉ, số thực và những tính chất của số nguyên, số hữu tỉ, số thực (xem chương trình môn toán lớp 6, 7, 8, 9).
3. Những kiến thức về các hàm số sơ cấp đã được học trong chương trình môn toán bậc PTCS, PTTH.

Những khái niệm và kiến thức về hình học phẳng và hình học không gian (lớp 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12).

III. YÊU CẦU VỀ LÝ THUYẾT

1. Người học cần phải nắm vững những khái niệm cơ bản sau đây:

a) Tập hợp con, quan hệ bao hàm và hai tập hợp bằng nhau.
b) Các phép toán trên các tập hợp (phép hợp, phép giao, phép lấy hiệu).
c) Cặp sắp thứ tự, tích Descartes.
d) Quan hệ hai ngôi trong một tập, quan hệ tương đương, quan hệ thứ tự.
e) Ánh xạ, đơn ánh, toàn ánh, song ánh, tích các ánh xạ, ánh xạ ngược.
f) Chỉnh hợp lặp, chỉnh hợp, hoán vị, tổ hợp.

➢ Chú ý: Ba khái niệm: quan hệ tương đương, quan hệ thứ tự, ánh xạ (trong đó có ba loại ánh xạ đặc biệt là đơn ánh, toàn ánh, song ánh) là những khái niệm có vai trò đặc biệt quan trọng trong toán học hiện đại, đồng thời cũng lại là những khái niệm trừu tượng và khó hiểu đối với người mới làm quen với lý thuyết tập hợp.

Để nắm vững được những khái niệm trên, người học phải nghiên cứu rất kỹ lý thuyết và phải nắm được các khái niệm có trước đó thông qua việc đào sâu, suy nghĩ và tự mình giải các bài tập có liên quan đến ba khái niệm đó.

2. Những tính chất và công thức quan trọng cần phải nắm vững:

Người học phải phát biểu một cách chính xác và chứng minh được các tính chất sau đây:

a) Ba tính chất của quan hệ bao hàm (phản xạ, phản đối xứng, bắc cầu).
b) Một số tính chất cơ bản của các phép toán trên tập hợp (§1-7.4).
c) Một số tính chất của lớp tương đương (phần quan hệ tương đương: §2-2.2).
d) Một số tính chất của ảnh và tạo ảnh (xem định lý trong §3-4.2).
e) Tính chất của đơn ánh, toàn ánh và song ánh (xem định lý trong §3-6.1).

f) Điều kiện tồn tại của ánh xạ ngược và tính chất duy nhất của ánh xạ ngược.

Các công thức tính số các chỉnh hợp lặp, chỉnh hợp, hoán vị, tổ hợp.

IV. CÁC DẠNG BÀI TẬP THƯỜNG GẶP

1. Khi tự học §1 (Tập hợp), người học cần chú ý một số vấn đề sau:

a) Trong hai cách (hay phương pháp) thường được sử dụng để xác định một tập hợp thì cách "chỉ rõ dấu hiệu đặc trưng" hay được sử dụng hơn trong toán học. Chẳng hạn, gọi A, B, C, D theo thứ tự là tập các số (tự nhiên) chẵn, lẻ, bội của 6, ước của 24, người ta thường viết:

$A = \{x \in N \mid x = 2k, k \in N\}$
$\quad = \{ 2k, k \in N\}$
$B = \{x \in N \mid x = 2k + 1, k \in N\}$
$\quad = \{ 2k + 1, k \in N\}$
$C = \{x \in N \mid x = 6k, k \in N\}$
$\quad = \{ 6k , k \in N\}$
$D = \{x \in N \mid x \mid 12\}$

Khi ta viết:

$X = \{x \mid x$ có tính chất T$\}$

thì điều đó có nghĩa là:

$x \in X \Leftrightarrow x$ có tính chất T

b) Khi tự học để tìm hiểu các khái niệm tập con, quan hệ bao hàm, hai tập bằng nhau, người học nên dùng một số ký hiệu của logic toán như $\Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall, \exists$ để cho cách diễn đạt các định nghĩa trở nên ngắn gọn, sáng sủa và do đó dễ hiểu. Chẳng hạn như viết:

$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B)$
$A = B \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Leftrightarrow x \in B)$
$\quad \Leftrightarrow A \subset B$ và $B \subset A$

A là bộ phận thực sự của B $\Leftrightarrow A \subset B$ và $A \neq B$

c) Khi tự học để tìm hiểu định nghĩa của phép toán $\cup, \cap,$ — (phép hợp, phép giao, phép lấy hiệu trên các tập hợp), người học phải suy nghĩ kỹ để hiểu các định nghĩa và sau đó biết vận dụng các định nghĩa vào việc chứng minh các đẳng thức tập hợp.

+ Phép hợp:

$A \cup B = \{x \mid x \in A$ hoặc $x \in B\}$

nghĩa là:

$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ hoặc $x \in B$

do đó:
$x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A$ và $x \notin B$
+ Phép giao:
$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}$
nghĩa là:
$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ và $x \in B$
do đó:
$x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A$ hoặc $x \notin B$
+ Phép lấy hiệu:
$A - B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}$
nghĩa là:
$x \in A - B \Leftrightarrow x \in A$ và $x \notin B$
do đó:
$x \notin A - B \Leftrightarrow x \notin A$ hoặc $x \in B$
Để rèn luyện cho mình phương pháp và năng lực suy luận logic, người học nên tự chứng minh một số đẳng thức tập hợp (xem các chứng minh một số tính chất trong định lý §1-7.4 và hướng dẫn giải bài tập chương I – bài tập 11).

d) Khái niệm cặp sắp thứ tự và tích Đề-các đối với người mới học là hơi khó, nhưng người học phải hết sức chú ý để nắm vững, bởi vì hai khái niệm này có liên quan chặt chẽ với khái niệm quan hệ hai ngôi, quan hệ tương đương, quan hệ thứ tự.

2. Khi tự học §2 (Quan hệ), người học cần chú ý một số vấn đề sau:

a) Khái niệm quan hệ hai ngôi trong một tập hợp là một khái niệm khó hiểu đối với người mới học. Ở đây người ta gọi một tập con S của bình phương Đề-các X^2 (hay tích Đề-các XxX) là một quan hệ hai ngôi trong tập X vì mỗi tập con S của XxX sẽ hoàn toàn xác định một quan hệ nào đó giữa các phần tử của X.

Để nắm được quan hệ hai ngôi trong một tập, người học sau khi đã nghiên cứu kỹ lý thuyết, cần tự mình giải các bài tập 14, 15, 16.

b) Quan hệ tương đương

Quan hệ tương đương là một quan hệ hai ngôi (trong một tập hợp) có vai trò đặc biệt quan trọng trong toán học. Để nắm vững khái niệm quan hệ tương đương, người học phải nắm vững:

- Định nghĩa các tính chất phản xạ, đối xứng, bắc cầu của một quan hệ hai ngôi trong một tập.
- Định nghĩa và ví dụ về quan hệ tương đương
- Khái niệm lớp tương đương
- Khái niệm tập tương đương

Sau khi nghiên cứu ký lý thuyết, người học nhất thiết phải tự mình giải các bài tập 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22 (chương I).

c) Quan hệ thứ tự

Cũng như quan hệ tương đương, quan hệ thứ tự là một loại quan hệ hai ngôi (trong một tập) có vai trò đặc biệt quan trọng trong toán học. Khi tự học để nắm vững khái niệm quan hệ thứ tự, người học cần lưu ý một số điểm sau:

- Trong định nghĩa quan hệ thứ tự (quan hệ hai ngôi trong một tập X có 3 tính chất: phản xạ, phản đối xứng, bắc cầu, được gọi là một quan hệ thứ tự), người ta dùng ký hiệu ≤ để chỉ một quan hệ thứ tự bất kỳ và người ta còn quy ước đọc ký hiệu ≤ là "nhỏ hơn hoặc bằng". Ta cần hiểu rằng ký hiệu ≤ và tổ từ "nhỏ hơn hoặc bằng" chỉ là sự bắt chước ký hiệu và tên gọi của ký hiệu đó trong các tập số quen biết. Vì vậy ký hiệu ≤ và tổ từ "nhỏ hơn hoặc bằng" trong trường hợp tổng quát sẽ không mang ý nghĩa thông thường của ký hiệu và cách đọc ký hiệu. Để tránh sự nhầm lẫn một số tác giả đã dùng các ký hiệu như là $\Im$, $\underline{\Delta}$, để chỉ một quan hệ thứ tự tùy ý. Tuy vậy, sau khi đưa vào định nghĩa sau đây của quan hệ < (đọc là "nhỏ hơn"):

  $x < y \Leftrightarrow x \le y$ và $x \ne y$

  Người ta lại dễ dàng chứng minh được rằng:

  $x \le y \Leftrightarrow x < y$ hoặc $x = y$

  khi đó ký hiệu ≤ và tổ từ "nhỏ hơn hoặc bằng" lại mang ý nghĩa thông thường như ta đã biết về quan hệ thứ tự ≤ thông thường trong các tập số.
- Trong một tập X, nếu có quan hệ thứ tự ≤ thì ta gọi X là một tập sắp thứ tự. Đôi khi ta ký hiệu một tập sắp thứ tự X với quan hệ thứ tự ≤ (còn gọi là thứ tự ≤) là (X, ≤).
- Trong một tập hợp X nào đó, có thể có nhiều quan hệ thứ tự. Chẳng hạn trong tập N^* có hai quan hệ thứ tự, đó là quan hệ thứ tự ≤ thông thường và quan hệ thứ tự "chia hết" (|). Ta dùng hai ký hiệu $(N^*, \le)$ và $(N^*, |)$ để chỉ hai tập sắp thứ tự khác nhau.

  Cần đặc biệt quan tâm đến các khái niệm quan hệ thứ tự toàn phần và tập sắp thứ tự toàn phần. Một quan hệ thứ tự trong ≤ trong tập X gọi là một quan hệ thứ tự toàn phần nếu nó thỏa mãn các điều kiện:

  $\forall\, x,y \in X$, ta có $x \le y$ hoặc $y \le x$

  Ta có thể chứng minh điều kiện tương đương với điều kiện sau: $\forall\, x,y \in X$, ta có hoặc $x < y$, hoặc $x = y$, hoặc $x > y$

Nếu ≤ là một quan hệ thứ tự toàn phần trong X thì ta gọi tập sắp thứ tự (X, ≤) là một tập sắp thứ tự toàn phần.

- Người học cần nắm vững các khái niệm khác như: phần tử lớn nhất, phần tử nhỏ nhất, chặn trên, chặn dưới và đặc biệt là khái niệm tập sắp thứ tự tốt.
- Đối với các khái niệm chặn trên nhỏ nhất, chặn dưới lớn nhất, phần tử tối đại, phần tử tối tiểu, người học đọc thêm để biết, qua đó hiểu sâu thêm về quan hệ thứ tự.
- Cuối cùng cần lưu ý rằng trong chương trình môn toán ở tiểu học, chúng ta chỉ dạy cho học sinh quan hệ < (đọc là "nhỏ hơn" hay "bé hơn") trong tập N các số tự nhiên. Với quan hệ ≤ thông thường trong N ta cũng hiểu quan hệ < như sau:

  $a < b \Leftrightarrow a \leq b$ và $a \neq b$.

Vì lý do sư phạm và tâm lý, nên chưa thể dạy cho học sinh tiểu học quan hệ ≤. Chẳng hạn nếu viết $1 \leq 5$ thì học sinh tiểu học chưa thể hiểu được, mà ta phải viết $1 < 5$. Rõ ràng quan hệ nhỏ hơn trong N (và cả trong tập sắp thứ tự bất kỳ) có tính chất phản đối xứng và bắc cầu nhưng không có tính chất phản xạ.

- Người học cần phải giải các bài tập 23, 24, 25, 26, 27 để nắm vững quan hệ thứ tự và các khái niệm có liên quan.

3. Khi tự học §3 (Ánh xạ), người học cần chú ý một số vấn đề sau:

a) Khái niệm ánh xạ là một khái niệm được mở rộng từ một khái niệm hàm số.

+ Định nghĩa khái niệm ánh xạ:

Một ánh xạ f từ X đến Y là một quy tắc đặt tương ứng mỗi phần tử $x \in X$ với một và chỉ một phần tử $y \in Y$.

Trong định nghĩa trên, cụm từ "một và chỉ một phần tử" có thể thay thế bởi các cụm từ khác có ý nghĩa tương đương:

"một phần tử duy nhất" hoặc "một phần tử hoàn toàn xác định".

Khi đó ta còn hiểu là: nếu có ánh xạ $f: X \to Y$ thì với mọi $x_1, x_2 \in X$, ta có:

$x_1 = x_2$ kéo theo $f(x_1) = f(x_2)$

để nắm vững định nghĩa khái niệm ánh xạ, sau khi đọc kỹ lý thuyết người học phải tự mình giải các bài tập 28, 29, 30 (chương I).

b) Khái niệm ảnh và tạo ảnh:

- ảnh của tập A bởi (hay "qua") ánh xạ f:

Có 2 cách xác định tập f(A):

$$f(A) = \{y \in Y \mid \exists\, x \in A \text{ sao cho } f(x) = y\}$$

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

như vậy ta có:

$y \in f(A) \Leftrightarrow \exists\, x \in A$ sao cho $y = f(x)$

- Tạo ảnh toàn phần của tập $B \subset Y$

  $f^{-1}(B) = \{ x \in X \mid f(x) \in B\}$

  Từ đó:

  $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$

  Tạo ảnh toàn phần của phần tử $b \in Y$:

  $f^{-1}(B) = f^{-1}(\{b\}) = \{x \in X \mid f(x) = b\}$

  Khái niệm ảnh và tạo ảnh toàn phần của một tập là những khái niệm hơi khó đối với người học. Vì vậy, người học phải nghiên cứu kỹ định nghĩa và ví dụ minh họa, sau đó tự mình nêu ra những ví dụ cụ thể và giải các bài tập 31, 32, 33 (chương I).

c) Đơn ánh, toàn ánh, song ánh là những loại ánh xạ đặc biệt, có vai trò rất quan trọng trong toán học hiện đại.

- Có ba định nghĩa (tương đương nhau) của khái niệm đơn ánh:

  + Ánh xạ $f: X \to Y$ được gọi là đơn ánh nếu và chỉ nếu với mọi x_1, $x_2 \in X$, ta có $x_1 \neq x_2$ kéo theo $f(x_1) \neq f(x_2)$.

  + Ánh xạ $f: X \to Y$ được gọi là đơn ánh nếu và chỉ nếu với mọi x_1, $x_2 \in X$, ta có $f(x_1) = f(x_2)$ kéo theo $x_1 = x_2$.

  + Ánh xạ $f: X \to Y$ được gọi là đơn ánh nếu và chỉ nếu mỗi $y \in Y$ có không quá một tạo ảnh $x \in X$ qua ánh xạ f.

  Chú ý rằng cum từ "có không quá một" có thể thay thế bởi các cụm từ có cùng nghĩa sau đây:

  "có không nhiều hơn một"

  "có tối đa là một".

  Chẳng hạn có thể phát biểu định nghĩa khái niệm đơn ánh như sau:

  Ánh xạ $f: X \to Y$ được gọi là đơn ánh nếu và chỉ nếu mỗi $y \in Y$ có tối đa một phần tử $x \in X$ sao cho $y = f(x)$.

- Có hai định nghĩa (tương đương nhau) của khái niệm toàn ánh:

  + Ánh xạ $f: X \to Y$ được gọi là toàn ánh nếu và chỉ nếu $f(X) = Y$.

  + Ánh xạ $f: X \to Y$ được gọi là toàn ánh nếu và chỉ nếu mỗi phần từ $y \in Y$ có ít nhất một tạo ảnh $x \in X$ bởi f (nghĩa là có ít nhất một phần tử $x \in X$ sao cho $y = f(x)$).

  Định nghĩa thứ hai có thể phát biểu như sau:

  + Ánh xạ $f: X \to Y$ là toàn ánh $\Leftrightarrow \forall y \in Y, \exists\, x \in X, y = f(x)$.

- Khái niệm song ánh có hai định nghĩa tương đương:

  + Ánh xạ $f: X \to Y$ gọi là song ánh nếu và chỉ nếu f vừa là đơn ánh, vừa là toàn ánh.

+ Ánh xạ f: X $\rightarrow$ Y gọi là song ánh nếu và chỉ nếu mỗi phần tử y $\in$ Y có một và chỉ một tạo ảnh x $\in$ X bởi f (nghĩa là với một y $\in$ Y tồn tại một phần tử duy nhất x $\in$ X sao cho y = f(x)).

Chú ý: từ định nghĩa thứ nhất của khái niệm song ánh, ta suy ra mệnh đề sau:

+ Ánh xạ f: X $\rightarrow$ Y không là song ánh $\Leftrightarrow$ f không phải là đơn ánh hoặc f không phải là toàn ánh.

- Ta thường vận dụng các định nghĩa nêu trên của ba khái niệm đơn ánh, toàn ánh, song ánh trong các chứng minh toán học của những định lý nói về các khái niệm đó (xem những chứng minh định lý 2-6.1, §3- chương I; và bài tập 37 (chương I).
- Ta phải vận dụng các định nghĩa để chứng minh một ánh xạ đã cho là (hoặc không là) đơn ánh, toàn ánh, song ánh (xem lời giải các bài tập 34, 36 – chương I).

4. Khi tự học §4 (Giải tích tổ hợp), người học cần chú ý một số vấn đề sau:

a) Người học phải nắm vững 4 khái niệm: chỉnh hợp lặp, chỉnh hợp, hoán vị và tổ hợp. Để nắm vững các khái niệm đó thì nhất thiết phải nắm được cách chứng minh 4 định lý về các công thức tính F^k_n (số các chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử); A^k_n (số các chỉnh hợp chập k của n phần tử); C^k_n (số các tổ chập k của n phần tử); P_n (số các hoán vị của n phần tử). Do đó, người học phải tự mình giải được các bài tập 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47.
b) Người học nên đọc thêm một số sách tham khảo về giải tích tổ hợp.
c) Người học chỉ cần nắm được công thức khai triển nhị thị thức Newton để vận dụng.

Người học nên vận dụng các công thức tính F^k_n và A^k_n vào việc giải một số bài tập về số và chữ ở 4-5.